

文章编号: 1000-8055(2010)02-0359-07

基于 Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov 方程的声爆频域预测法

陈 鹏, 李晓东

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 建立了一种快速预测声爆传播特性的频域方法, 基于传统 Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov (KZK) 方程, 描述声爆沿激波波阵面法线方向的传播. 为了验证模型正确性, 以 NASA TD N-161 中试件 C 为对象, 首先基于不同网格, 利用计算流体力学 (CFD) 方法得到超声速流场; 将 CFD 结果作傅里叶变换后代入模型方程, 快速求解声爆传播特性. 预测结果与 NASA 实验结果符合很好, 研究表明: 预测方法能够捕捉声爆的非线性传播, 声衍射项使得声场在远场趋于轴对称分布, 远距离传播后声能量集中于低频分量.

关 键 词: 声爆; Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov (KZK) 方程; 非线性传播; 频域法

中图分类号: V211.3

文献标识码: A

Frequency domain method for predicting sonic boom propagation based on Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov equation

CHEN Peng, LI Xiao-dong

(School of Jet and Propulsion,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: A fast frequency domain method for predicting sonic boom propagation was proposed based on classical Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov (KZK) equation. Furthermore, the sonic boom properties along the normal direction to the shock front were obtained by augmenting the Mach angle into the equation. To demonstrate the feasibility of the method, the results were compared with the experimental data of the model C presented in NASA TD N-161. The flow field of the supersonic moving vehicle was first calculated by a computational fluid dynamics (CFD) method with different grids. Then, the sonic boom propagation was computed based on the proposed KZK model with the input of the Fourier analysis results from CFD. The prediction results are in good agreement with NASA experimental data. It is also shown that the sonic boom decays rapidly in the near field due to the nonlinearity effects. In the far field, the sonic boom becomes axisymmetric gradually due to the effect of sound diffraction. After long distance propagation, the sound energy is concentrated on low frequency component.

Key words: sonic boom; Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov (KZK) equation; nonlinear propagation; frequency domain method

收稿日期: 2009-01-13; **修订日期:** 2009-04-22

基金项目: 教育部新世纪优秀人才支持计划 (NCET-07-0038); 航空基础科学基金 (2006ZB51023)

作者简介: 陈鹏 (1980 -), 男, 四川内江人, 博士生, 主要从事非线性声学传播预测方向研究.

声爆是一种非线性气动声学现象.当飞机作超声速飞行时,其机鼻、机翼、尾翼等均会产生斜激波;另一方面,由于机身外形变化,斜激波之间会存在膨胀波系.这两种波系相互作用在增加了飞机近场流场复杂性的同时,产生的压力扰动随飞机一起运动即成为声爆的声源^[1].由于该声源发出的声波具有较大幅值,在大气层里经过一定距离衰减之后仍会对飞行通过的区域带来严重的噪声污染,因此,国际民航组织严格限制了超声速飞机的飞行区域.

为了降低军用飞机对地面的噪声影响,考虑超声速客机存在的商业潜能,自从上世纪50年代以来,各国科研工作者针对声爆展开了一系列研究工作.基于Whitham^[2]的弱激波理论及F函数,研究者从几何声学出发建立了声压与声射线管横截面积之间的关系,但对焦散区域的处理增加这类方法的复杂性^[3].此外,研究者基于Burgers方程开发了各种预测程序,但计算时间过长,且不包括衍射作用对声传播的影响^[4].

NASA的实验,不但在马赫数为2.01的超声速风洞内得到了各种试件产生的声爆信息^[5],为计算流体力学(computational fluid dynamics, CFD)研究提供校核依据^[6];而且测试了声爆在大气中的传播以及对地面的影响,提出通过改变飞机外形以降低声爆的方案^[7].

为了更真实地刻画声爆传播,本文以非轴对称物体产生的声爆为对象,基于Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov(KZK)方程,沿声爆传播方向建立预测模型.KZK方程是Burgers方程的推广,方程包含了衍射项、非线性项、吸收项,若结合大气参数可以模拟声爆的真实传播^[8].

本文采用频域法^[8]能够快速求解模型方程,即:利用CFD的计算结果,将压力扰动傅里叶变换后代入模型方程,从而可以获得声爆的传播特性.通过与实验数据进行对比,验证了预测模型的正确性.

1 模型方程

声爆问题中,声波沿激波波阵面的法线方向传播,与飞机飞行方向不一致.然而传统的KZK方程是从二阶波动方程出发,考虑与声传播平行的方向为轴线建立圆柱坐标系,利用摄动方法推导得出的.

本文的声爆预测模型建立在以飞行方向为轴线的圆柱坐标系内,刻画沿激波波阵面法线方向

的传播特性.本文假设对于具有较高声压幅值的声传播,仍采用声学的线性假设^[8],即压力、密度、速度、声速、熵等参数的扰动量可表述为

$$\begin{cases} p' = p - p_0, & p' \ll p_0, \\ \rho' = \rho - \rho_0, & \rho' \ll \rho_0, \\ u = V - V_0, & u \ll V_0, \\ c'^2 = c^2 - c_0^2, & c'^2 \ll c_0^2, \\ S' = S - S_0, & S' \ll S_0. \end{cases}$$

将此假设代入欧拉方程,略去高于二阶小量项,得到圆柱坐标系 (r, θ, z) 下的二阶波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \right) p' = \frac{\gamma+1}{2\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p'^2 \quad (1)$$

其中拉普拉斯算子为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

研究对象轴线长度为 L ,定义特征长度 $a = L$.显然对声爆而言 $ka \gg 1$,其中波数 $k = \omega/c_0$.因此,声波的声压梯度在波阵面法线方向的分量大于其波阵面上的分量^[8].已知波阵面法线方向即是马赫锥的法线方向,若飞行马赫数为 Ma ,马赫角 $\mu = \arcsin(1/Ma)$,则法向单位向量 $\mathbf{n} = (\cos \mu, 0, \sin \mu)$,其分量对应圆柱坐标系 (r, θ, z) 下的方向余弦.设沿 $\mathbf{n}$ 方向增长的弧长为 s ,沿马赫锥母线方向增长的弧长为 l ,如图1所示, θ 为圆柱坐标系下角度,令 $\theta' = \theta$.假设声爆传播的起始位置与研究对象轴线的垂直距离为 r_0 ,则由方向导数的定义可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \cos \mu \frac{\partial}{\partial s}, & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{1}{r_0 + s \cos \mu} \frac{\partial}{\partial \theta'}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \sin \mu \frac{\partial}{\partial s} \end{aligned} \quad (2)$$

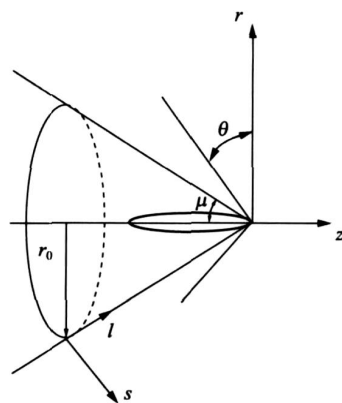


图1 声爆传播方向

Fig. 1 Direction of the sonic boom propagation

另一方面,噪声沿 n 方向传播受衍射作用影响,其长度尺度为黎曼距离 $\frac{1}{2}ka^2$;而垂直于 n 方向的长度尺度与 a 相关.由于 $ka \gg 1$,因此沿传播方向 n 具有较为缓慢变化的空间尺度,令 $s_1 = \varepsilon s$,其中 $\varepsilon \ll 1$, $\tau = t - s/c_0$;垂直于 s 的坐标则乘上 $\varepsilon^{1/2}$.在此假设下,KZK 方程中衍射项与非线性项同阶.于是声压可写作

$$p' = p(s_1, \theta, l_1, \tau),$$
$$(s_1, \theta, l_1) = (\varepsilon s, \varepsilon^{1/2} \theta', \varepsilon^{1/2} l)$$

相应偏导数为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_s = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)_{s_1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_t = \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)_\tau - \frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)_{s_1},$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)_t = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}\right)_\tau -$$
$$\frac{2\varepsilon}{c_0} \left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)_\tau \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)_{s_1} + \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)_{s_1} \quad (3)$$

代入方程(1),略去 $O(\varepsilon^2)$ 项,再对 τ 积分一次,整理可得

$$\frac{\partial P_m}{\partial S} = im \left(\frac{\gamma+1}{4\rho_0 c_0^3} \omega S_c P_c \right) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^m P_n P_{m-n} + \sum_{n=m+1}^M P_n P_{n-m}^* \right) \quad (5a)$$

$$\frac{P_m(S+\Delta S) - P_m(S)}{\Delta S} =$$
$$\frac{V_c}{2im\omega(R_0 + S\cos\mu)^2 S_c} \frac{P_m(\theta+\Delta\theta, S+\Delta S) - 2P_m(\theta, S+\Delta S) + P_m(\theta-\Delta\theta, S+\Delta S)}{\Delta S^2} -$$
$$\frac{\sin\mu}{2(R_0 + S\cos\mu)} P_m(S) \quad (5b)$$

式中 $P_0 = 0$, $P_{-m} = P_m^*$ 即取其共轭复数.方程(5)中前一个方程采用低频散低耗散龙格-库塔 5/6 步法^[9],后一个方程则采用隐式后差格式^[10].

数值求解方程(5)即可得到不同传播距离 S 处的声爆特性.可在指定位置处利用 P_m 进行傅里叶反变换,获得声爆传播过程的压力曲线.

2 计算结果与分析

NASA Langley 风洞实验在侧壁上固定一块边界层旁路平板,利用置于板上开孔内的压力传感器提取流场静压信息.通过改变试件相对于平板的位置,得到不同径向距离处的静压结果.由于流场中增加了测板,故需要对压力测量值引入反射系数,取为 2.0.

为了验证模型方程(5)的正确性,本小节以 NASA 报告中的试件 C 为研究对象,计算声爆传播过程中压力曲线的非线性变化.试件 C 是展弦比为 1/2 的双弧翼形,其几何外形如图 2 所示,图中单

$$\frac{\partial p'}{\partial s} = \frac{\gamma+1}{4\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} +$$
$$\int_{c_0}^1 \frac{1}{(n_0 + s\cos\mu)^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} d\tau -$$
$$\frac{\sin\mu}{2(n_0 + s\cos\mu)} p' \quad (4)$$

方程(4)即是沿声爆传播方向的 KZK 方程,其中右端第一项刻画声波的非线性作用,第二项和第三项则与声衍射相关.与传统 KZK 方程不同的是,方程(4)中的声衍射项中包含了马赫角,即声波的传播方向并不与坐标轴线平行.

声压 p 的傅里叶变换为

$$p' = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_m \exp(i\omega \tau)$$

其中 p_m 为傅里叶系数.设无量纲尺度为

$$S_c = \frac{1}{2}ka^2, \quad P_c = p_0, \quad \rho_c = \rho_0, \quad V_c = c_0,$$

代入方程(4),并写作分步积分的形式

位为 mm,公式中 t 表示弦长方向的厚度.为了便于分析,图 2 中周向角度 ϕ 与 NASA 实验中的定义一致.

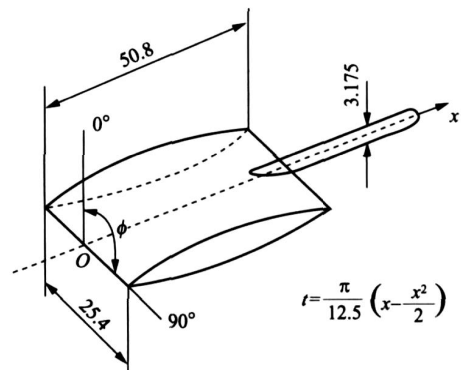


图 2 试件 C 的几何外形

Fig. 2 Sketch of model C

2.1 CFD 计算结果

利用 ANSYS CFX, 选用高分辨率格式, 计算中加入 SST (shear stress transport) 湍流模型, 忽略试件尾部圆柱形支撑件以保证网格质量, 网格局部图 3 所示。需要注意的是, CFD 计算与声传播计算中, 轴线方向相反, 即图 2 中 x 轴与图 1 中 z 轴的方向反向。

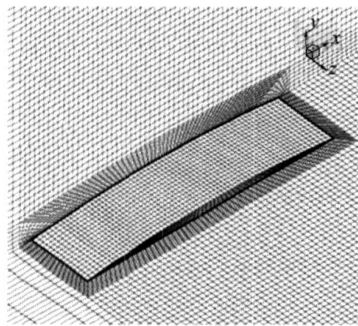


图3 CFD 计算网格局部

Fig. 3 Local grids for CFD calculation

本文分别用格点数为 99 万 (记为网格 1) 和 53 万 (记为网格 2) 的网格计算, 结果如图 4 所示, 图中参考坐标分别定义为 $X = x - R \sqrt{Ma^2 - 1}$, $R = r_0 + s \cos \mu$ 。

图 4 分别给出在 $R/L = 1$, $\phi = 0^\circ, 45^\circ$ 和 90° 处的压力曲线与实验值的对比。由图可知: 网格 1 对应的计算结果更接近实验值, 仅在 90° 处的激波幅值略微高于实验结果; 网格 2 的计算结果较网格 1 的结果及实验值偏小。可见, 网格密度决定激波幅值的精度, 因此应调整网格密度得到正确的激波幅值。此外, 忽略后缘支架导致 0° 处膨胀波的压力较实验值偏小, 但由于声爆传播主要与激波强度相关, 故这部分误差可忽略。

2.2 声爆预测结果

计算声爆传播前, 用网格 1 的 CFD 计算结果进行前处理工作: 首先, 在圆柱坐标系内的 r_0 处提取压力值, 不失一般性, 本文取 $r_0 = L$ 。其次, 周向角度划分 90 个网格刻画波阵面, 计算声衍射作用。声传播计算中的角度 θ 与 2.1 节中的角度 ϕ 反号, 因此结果分析中分别提取与 ϕ 对应的 θ 处的计算结果与实验值进行对比。第三, 分别对不同角度处的压力扰动以轴线坐标为参量作傅里叶变换, 将傅里叶系数作为初始值带入方程 (5) 计算。对于由于采用频域法计算, 本算例用单个 Intel

Pentium D 主频为 3.4 GHz 的处理器, 计算声爆传播到 $R/L = 64$ 处所需的 CPU 时间是 10 000 s 左右。

图 5 中 (a)~(c) 分别给出不同周向位置处压力扰动幅值 $\Delta p_{\max}/p_0$ 随径向距离变化的情况。

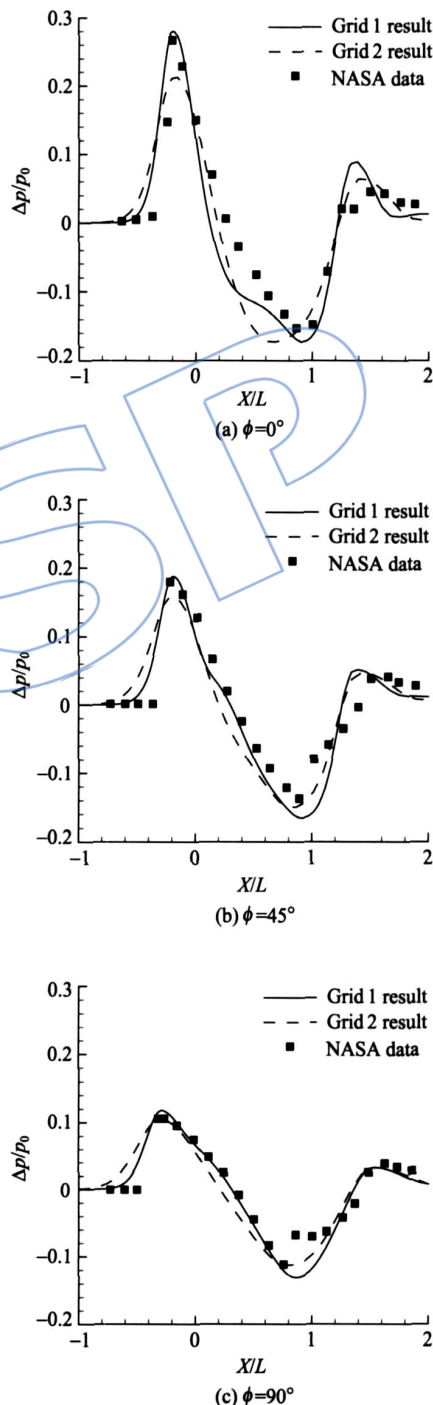


图4 $R/L = 1$, CFD 计算结果

Fig. 4 $R/L = 1$, CFD results

由图可知, $\phi=0^\circ$ 和 45° 处的预测结果与实验值符合得很好;由于受到 CFD 结果影响, $\phi=90^\circ$ 处的预测结果较实验值偏大。

进一步分析声爆传播特性,图 6~图 8 分别给出不同径向位置处压力曲线与实验结果的对比。

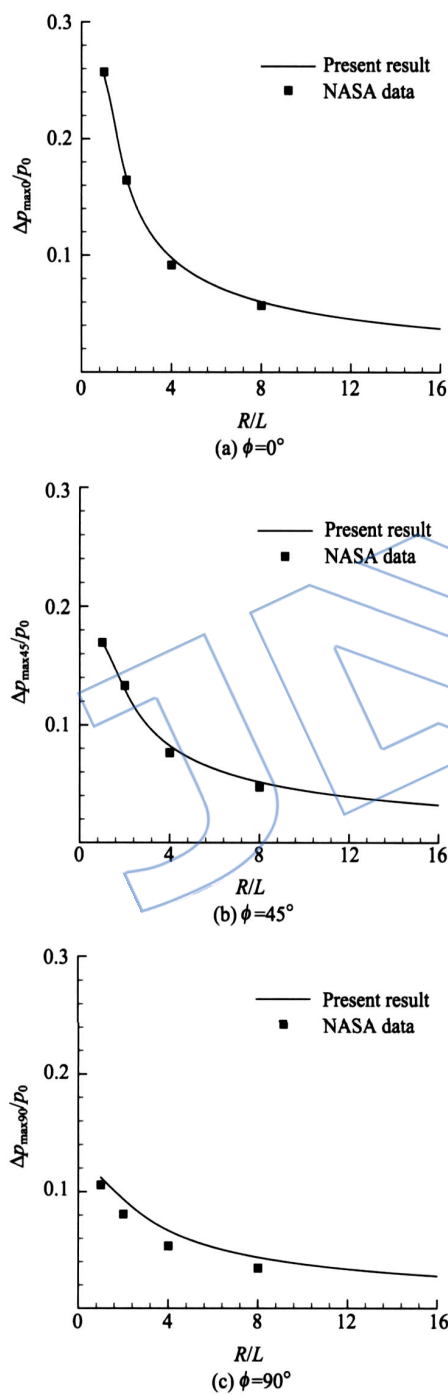


图 5 不同径向位置处, $\Delta p_{\max}/p_0$ 的结果
Fig. 5 $\Delta p_{\max}/p_0$ at different radial locations

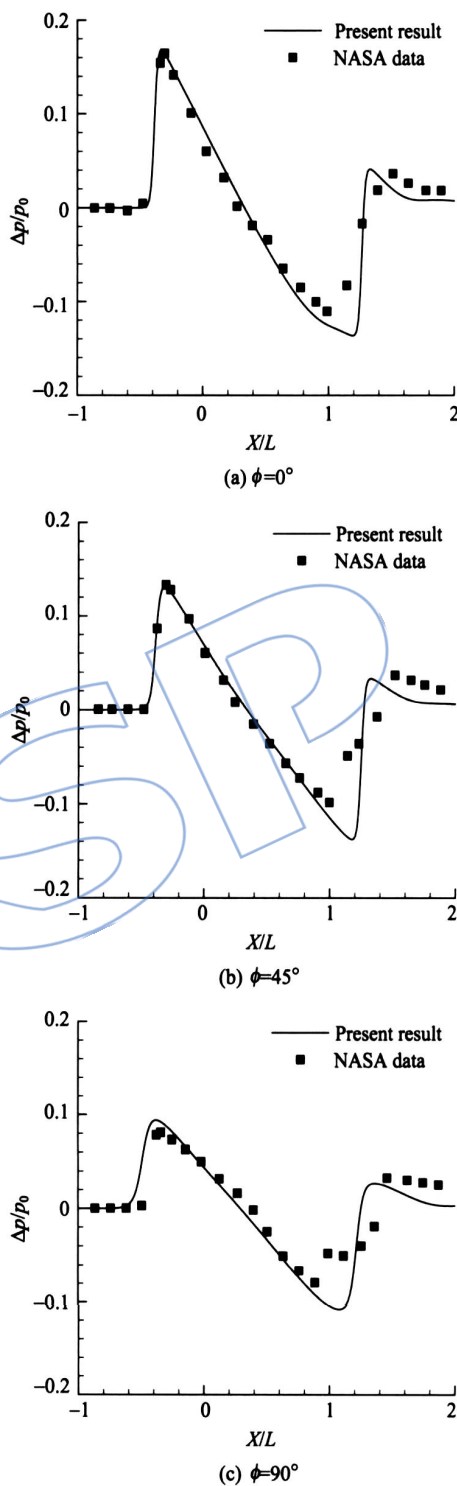


图 6 $R/L=2$ 处不同周向位置的压力曲线
Fig. 6 Pressure curves at different circumferential locations ($R/L=2$)

$R/L=2$ 处的压力曲线如图 6 所示,其形状与图 4 类似,幅值有明显衰减,过尾部激波后的压力扰动值保持为正。随着传播距离的增加,压力扰动的曲线逐渐向“N”形过渡。由图 7 可以看出, $R/L=8$ 处,头部激波后的预测结果与实验结果一

致;尾部激波后的结果较实验值偏小.这是因为实验中模型的支撑件对尾部激波强度会产生一定影响,而且这一影响在远场依然存在.

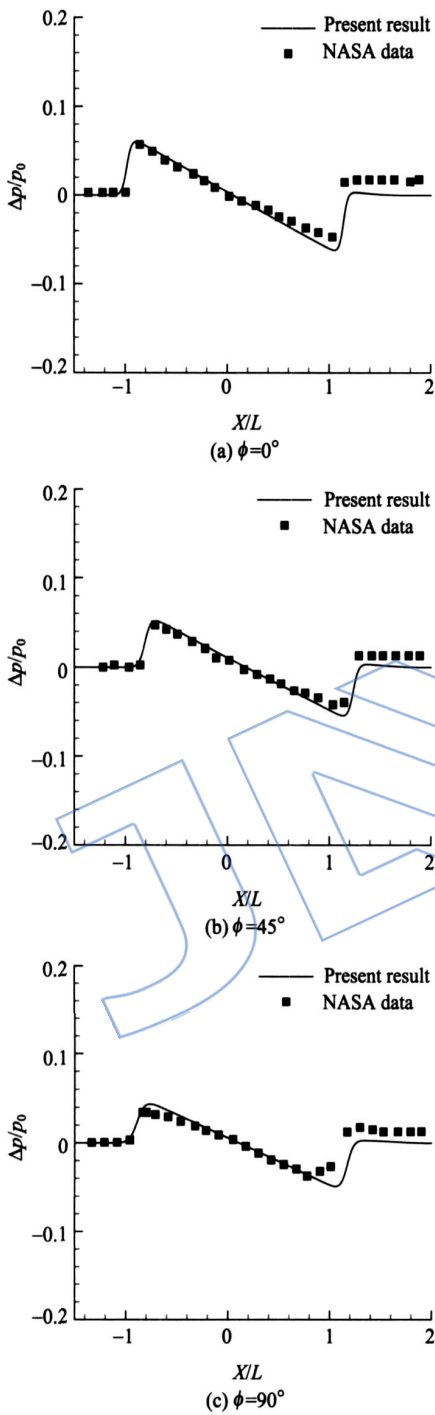


图 7 $R/L = 8$ 处不同周向位置的压力曲线

Fig 7 Pressure curves at different circumferential locations ($R/L = 8$)

当声爆传播至远场,如 $R/L = 64$ 时,压力扰动幅值进一步衰减.如图 8 所示,预测值在不同周向角度上的压力曲线几乎相同.在模型方程中声

衍射项的作用下,传播过程中,压力扰动值逐渐在周向上趋于一致,即声场逐渐趋于轴对称分布.因此在声爆的影响区域内,不同的人及建筑物受到的作用是相同的.

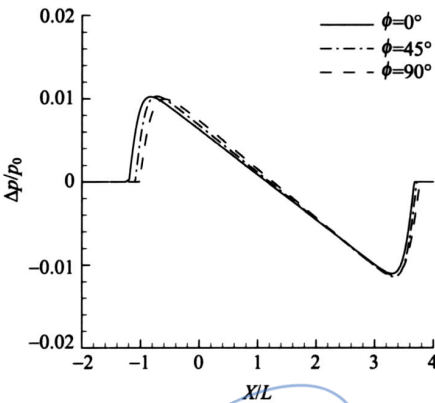


图 8 $R/L = 64$ 处不同周向位置的压力曲线

Fig 8 Pressure curves at different circumferential locations ($R/L = 64$)

最后,本文通过对某一周向位置处压力扰动的频谱变化情况,得到声能量在各频率间的传递规律,即随着压力扰动曲线逐渐变为“N”形,声能量逐渐向低频传递.图 9 给出 $\phi = 0^\circ$,不同传播距离处的频谱对比.如图所示,声压级最大值所处的频率逐渐降低, $R/L = 1$ 时大约在 7200 Hz, $R/L = 64$ 时大约在 2000 Hz;当声爆传至远场,能量主要集中于低频分量.因此,可以通过控制低频分量,降低声爆对人及地面建筑带来的影响.

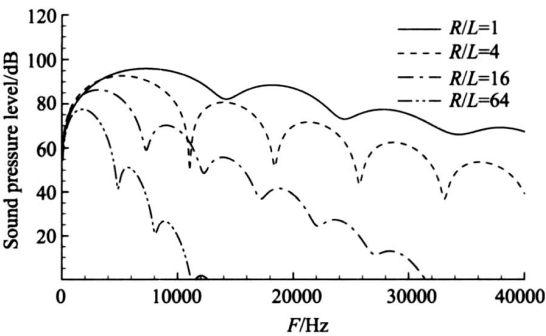


图 9 $\phi = 0^\circ$ 不同传播距离处,声爆频谱对比

Fig 9 Spectra comparison with the different locations at $\phi = 0^\circ$

图 10 为 $\phi = 0^\circ$ 处,声爆全局声压级 (overall sound pressure level, OASPL) 随传播距离的变化情况.从图中可以看出,虽然试件 C 的几何尺寸

不大,但其产生的声爆噪声在远场的声压级依然高于 90 dB.

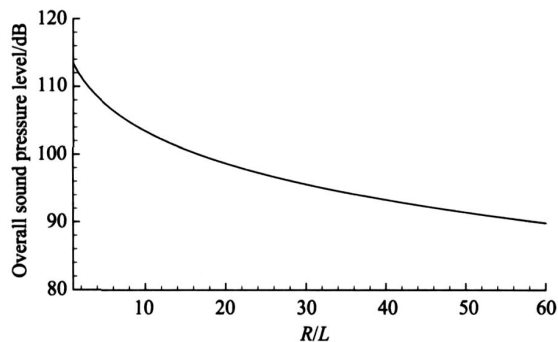


图 10 $\phi=0^\circ$ 处,声爆全局声压级的变化情况

Fig. 10 Overall sound pressure level during the propagation at $\phi=0^\circ$

3 结 论

本文建立了沿激波波阵面法线方向的声爆传播预测模型;利用 CFD 计算结果,通过频域法快速求解方程,得到了声爆的传播特性.预测结果与 NASA 风洞实验结果一致,从而验证了本文模型的正确性.由于计算所需时间短,该模型能够为飞机的外形改进、地面的噪声控制等研究问题提供参考.

研究发现:

- 1) 预测模型能够准确刻画声爆幅值的非线性衰减;
- 2) 预测模型通过声衍射项,捕捉到声爆能量的分布特点,即从近场的非轴对称分布逐渐趋于远场的轴对称分布;
- 3) 从 $\phi=90^\circ$ 处的结果可以看出,声爆预测模型的准确性与 CFD 结果密切相关.

此外,如果在方程(5)中加入大气分子弛豫效应、湍流吸收作用、当地声速随高度的变化规律、风速等因素,可以进一步完善模型,用以捕捉声爆在大气中的真实传播.

参考文献:

- [1] Maglieri D J, Plotkin K J. Sonic boom, chapter 10, aeroacoustics of flight vehicles[R]. NASA RP-1258, 1991, 1:519-561.
- [2] Whitham G B. The flow pattern of a supersonic projectile [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1952, 5:301-348.
- [3] Seebass R. Sonic boom theory [J]. Journal of Aircraft, 1969, 6:177-184.
- [4] Cleveland R O, Chambers J P, Bass H E et al. Comparison of computer codes for the propagation of sonic boom waveforms through isothermal atmospheres [J]. Journal of Acoustical Society of America, 1996, 100(5):3017-3027.
- [5] Carlson H W. An investigation of some aspects of the sonic boom by means of wind-tunnel measurements of pressures about several bodies at a Mach number of 2.01 [R]. NASA TN D-161, 1959.
- [6] Rosendale J V. Floating shock fitting via Lagrangian adaptive meshes [R]. NASA CR-194997, 1994.
- [7] Meredith K B, Dahlin J A, Graham D H, et al. Computational fluid dynamics comparison and flight test measurement of F-5E off-body pressures [R]. AIAA Paper 2005-0006, 2005.
- [8] Hamilton M F, Blackstock D T. Nonlinear acoustics [M]. San Diego, USA: Academic Press, 1998.
- [9] Stanescu D, Habashi W G. 2N-storage low dissipation and low-dispersion Runge-Kutta for computational acoustics [J]. Journal of Computational Physics, 1998, 143:674-681.
- [10] Khokhlova V A, Souchon R, Tavakkoli J, et al. Numerical modeling of finite-amplitude sound beams: shock formation in the near field of a cw plane piston source [J]. Journal of Acoustical Society of America, 2001, 110(1):95-108.